

"Stochastic modelling and derivatives in traditional markets and in crypto-markets"

DU Financial Engineering

SU (Sorbonne Université) - X (Ecole polytechnique)

Emmanuel Gobet (cours et TD)

SEMAINE 2

- 1 Modélisation à temps discret 3
- 2 Pricing et hedging d'une option européenne vanille (type call/put) 6
- 3 Convergence lorsque le nombre de dates $n \rightarrow +\infty$ 10

Objectif : introduire les idées fondamentales de pricing/hedging dans un modèle simplifié

1 Modélisation à temps discret

1.1 Modèle de prix

Description d'un modèle aléatoire de prix évoluant sous la probabilité historique $\mathbb{P}$ (probabilité subjective)

- 1 action sans dividende, prix initial S_0
- plusieurs dates, $t_0 = 0, t_1, \dots, t_n$
- en $t = t_1$, deux états possibles :
 - $S_0 u$ avec probabilité p^{up}
 - $S_0 d$ avec probabilité p^{down}
 avec $p^{\text{up}} + p^{\text{down}} = 1$, $0 < p^{\text{up}} < 1$, $0 < p^{\text{down}} < 1$, $d < u$
- en $t = t_2$, trois états possibles :
 - $S_0 u^2$ avec probabilité $(p^{\text{up}})^2$
 - $S_0 d^2$ avec probabilité $(p^{\text{down}})^2$
 - $S_0 u d$ avec probabilité $2p^{\text{down}} p^{\text{up}}$
- taux d'intérêt r sur une période : 1€ en $t = 0$ devient $1+r\text{€}$ en $t = t_1$, puis $(1+r)^2\text{€}$ en $t = t_2$, etc

Proposition. Absence d'Opportunité d'Arbitrage $\Rightarrow d < 1 + r < u$

1.2 Option, portefeuille de couverture

- Option de **payoff** $\Psi(S_{t_n})$ à maturité t_n , exercice européen
- Portefeuille de couverture :
 - π_t^0 montant investi en cash
 - δ_t nombre d'actions en portefeuille (dépend du marché)
 - valeur liquidative du portefeuille $V_t = \pi_t^0 + \delta_t S_t$
 - condition d'autofinancement :

$$V_{t_{i+1}} = \pi_{t_i}^0 (1 + r) + \delta_{t_i} S_{t_{i+1}} = \pi_{t_{i+1}}^0 + \delta_{t_{i+1}} S_{t_{i+1}}$$

Problème de couverture : trouver V_0 et $\delta_{t_0}, \dots, \delta_{t_{n-1}}$ (calculés le long du scénario de marché) tels que

$$V_{t_n} = \Psi(S_{t_n}).$$

Alors par AOA, V_0 doit être le "juste prix (fair price)" de l'option à la date 0.

1.3 Exemple

- Call $\Psi(S) = (S - K)_+$, avec strike $K = 5$
- $S_0 = 4$, $u = 2$, $d = 1/2$, $r = 1/4$

On vérifie que $V_0 = 1.20$ et $\delta_0 = 1/2$ donne dans tous les cas (up et down)

$$V_{t_1} = \Psi(S_{t_1}).$$

Cette stratégie réplique bien le call sur une période. Donc le prix du call à $t = 0$ est 1.20.

2 Pricing et hedging d'une option européenne vanille (type call/put)

2.1 Solution générale sur une seule période ($n = 1$)

Mise en équation et résolution :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} V_0 = \pi_0^0 + \delta_0 S_0, \\ \Psi(S_{t_1}) = V_{t_1} = \pi_0^0(1+r) + \delta_0 S_{t_1} \quad \text{avec probabilité 1,} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} V_0 = \pi_0^0 + \delta_0 S_0, \\ \Psi(S_0 u) = \pi_0^0(1+r) + \delta_0 S_0 u, \\ \Psi(S_0 d) = \pi_0^0(1+r) + \delta_0 S_0 d, \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \delta_0 = \frac{\Psi(S_0 u) - \Psi(S_0 d)}{S_0(u-d)}, \\ \pi_0^0 = \frac{-d\Psi(S_0 u) + u\Psi(S_0 d)}{(1+r)(u-d)}. \end{cases} \end{aligned}$$

⇒ il existe une stratégie de couverture de l'option !!

De plus, le prix de l'option est

$$V_0 = \frac{\Psi(S_0 u)}{1+r} \underbrace{\left(\frac{1+r-d}{u-d} \right)}_{:=q^{\text{up}}} + \frac{\Psi(S_0 d)}{1+r} \underbrace{\left(\frac{u-(1+r)}{u-d} \right)}_{:=q^{\text{down}}}.$$



Le prix ne dépend pas du rendement de S .

Remarques.

- $0 < q^{\text{down}}, q^{\text{up}} < 1$, $q^{\text{down}} + q^{\text{up}} = 1 \implies$ définit une nouvelle probabilité $\mathbb{Q}$.
- $V_0 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{\Psi(S_{t_1})}{1+r}\right)$, espérance du payoff actualisé sous cette probabilité $\mathbb{Q}$ (et non sous la probabilité historique $\mathbb{P}$)
- Re-interprétation avec probabilité risque-neutre :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(S_{t_1}) = S_0 u q^{\text{up}} + S_0 d q^{\text{down}} = S_0(1+r) \quad !!$$

$\implies$ Sous $\mathbb{Q}$, le rendement de S est aligné sur le taux sans risque (calcul de prix comme si nous étions neutres au risque (pas de prime donné au risque, $\mathbb{Q}$ = probabilité risque-neutre))

2.2 Solution générale sur n périodes

Prix $V_{t_i} = v(t_i, S_{t_i})$ pour une fonction de prix v .

Calcul rétrograde :

1. Initialisation : $v(t_n, S_{t_n}) = \Psi(S_{t_n})$
2. Itération : $i = n - 1, \dots, i = 0$

$$v(t_i, S_{t_i}) = \frac{v(t_{i+1}, S_{t_i} u)}{1 + r} q^{\text{up}} + \frac{v(t_{i+1}, S_{t_i} d)}{1 + r} q^{\text{down}},$$

$$\delta(t_i, S_{t_i}) = \frac{v(t_{i+1}, S_{t_i} u) - v(t_{i+1}, S_{t_i} d)}{S_{t_i} (u - d)} \quad (\text{dérivée "discrète" du prix}).$$

Réécriture avec la probabilité risque-neutre :

(processus prix) $V_{t_i} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\frac{V_{t_{i+1}}}{(1 + r)} \mid S_{t_i} \right) = \dots = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\frac{\Psi(S_{t_n})}{(1 + r)^{n-i}} \mid S_{t_i} \right),$

(fonction prix) $v(t_i, S) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\frac{v(t_{i+1}, S_{t_{i+1}})}{(1 + r)} \mid S_{t_i} = S \right) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\frac{\Psi(S_{t_n})}{(1 + r)^{n-i}} \mid S_{t_i} = S \right).$

La fonction prix ne dépend pas de $\mathbb{P}$, le processus de prix dépend de $\mathbb{P}$ via la réalisation du marché S_{t_i} .

Propriété. Les prix actualisés sont martingales sous la probabilité risque-neutre $\mathbb{Q}$:

$$\frac{V_{t_i}}{(1+r)^i} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\frac{V_{t_{i+1}}}{(1+r)^{i+1}} \mid S_{t_i} \right) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\frac{\Psi(S_{t_n})}{(1+r)^n} \mid S_{t_i} \right).$$

Réciproquement, si $\left\{ \frac{V_{t_i}}{(1+r)^i} : 0 \leq i \leq n \right\}$ est une $\mathbb{Q}$ -martingale et $V_{t_i} = v(t_i, S_{t_i})$ alors V_{t_i} est la valeur d'un portefeuille autofinçant.

3 Convergence lorsque le nombre de dates

$$n \rightarrow +\infty$$

3.1 Rappel sur les convergences probabilistes

Définition (Convergence presque-sûre). La suite $(X_n)_n$ converge presque sûrement vers X (noté $X_n \xrightarrow{p.s.} X$) si

$$\mathbb{P}(\{\omega : |\mathbf{X}_n(\omega) - \mathbf{X}(\omega)| \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty\}) = 1.$$

Exemple.

1. $X_n = \mathbf{1}_{U \leq 1/n}$ où U est une variable de loi uniforme sur $[0, 1]$: $\mathbf{X}_n \xrightarrow{p.s.} \mathbf{0} = \mathbf{X}$.
On a aussi $\mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{n} \rightarrow 0 = \mathbb{E}(X)$.
2. $X_n = n^2 \mathbf{1}_{U \leq 1/n}$: $\mathbf{X}_n \xrightarrow{p.s.} \mathbf{0} = \mathbf{X}$. Mais $\mathbb{E}(X_n) = n^2 \frac{1}{n} \rightarrow +\infty \neq \mathbb{E}(X)$.



La convergence presque sûre ne garantit pas la convergence des moments.

Théorème (*Th. de Lebesgue ou de convergence dominée*).

Si $\mathbf{X}_n \xrightarrow{\text{p.s.}} \mathbf{X}$ et si

$$\forall n, \quad |\mathbf{X}_n| \leq \mathbf{Z} \text{ avec } \mathbb{E}(\mathbf{Z}) < +\infty,$$

alors $\mathbb{E}(X_n) < +\infty$, $\mathbb{E}(X) < +\infty$ et on a la convergence des espérances :

$$\mathbb{E}(\mathbf{X}_n) \rightarrow \mathbb{E}(\mathbf{X}).$$

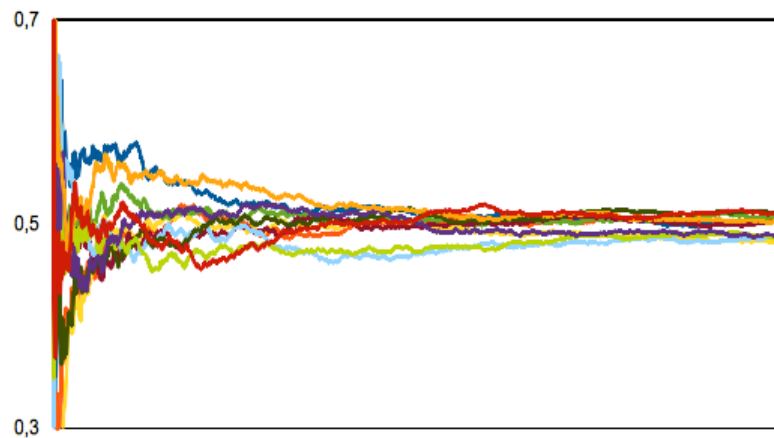
Corollaire. Si $\mathbf{X}_n \xrightarrow{\text{p.s.}} \mathbf{X}$ et f une fonction continue bornée, alors $f(X_n) \xrightarrow{\text{p.s.}} f(X)$ et

$$\mathbb{E}(\mathbf{f}(\mathbf{X}_n)) \rightarrow \mathbb{E}(\mathbf{f}(\mathbf{X})).$$

3.2 Loi forte des grands nombres

Théorème. Soit $(Y_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi, intégrable ($\mathbb{E}(|Y|) < +\infty$). Alors

$$X_n = \frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n} \xrightarrow{p.s.} \mathbb{E}(Y)$$



Plusieurs jeux de 1000 simulations de $n \mapsto X_n$ pour calculer $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{2}$ avec Y de loi uniforme sur $[0, 1]$.

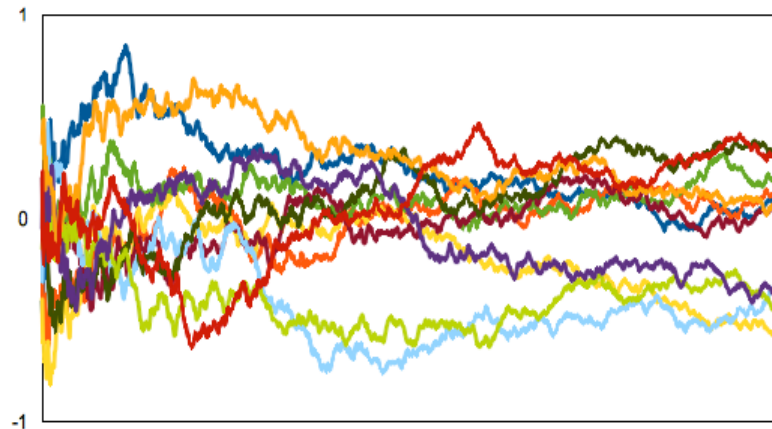
Convergence presque sûre

Indépendance des Y_i $\implies$

$$\mathbb{V}\text{ar}(\mathbf{X}_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{V}\text{ar}(\mathbf{Y}_i) = \frac{\mathbb{V}\text{ar}(\mathbf{Y})}{n}$$

$\implies n\mathbb{V}\text{ar}(X_n)$ est constant.

Que dire du comportement de $\sqrt{n}(X_n - \mathbb{E}(Y))$?



Plusieurs jeux de 1000 simulations de $n \mapsto \sqrt{n}(X_n - \mathbb{E}(Y))$
 Pas de convergence presque sûre

3.3 Convergence en loi

Définition. La suite $(X_n)_n$ converge en loi vers X (noté $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$) si pour toute fonction f continue bornée

$$\mathbb{E}(f(X_n)) \rightarrow \mathbb{E}(f(X))$$

lorsque $n \rightarrow \infty$.

Exemple. Si X_n de loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$ avec $\sigma_n^2 \rightarrow \sigma^2 > 0$, alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, où X est de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, car

$$\mathbb{E}(f(X_n)) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{1}{2} \frac{x^2}{\sigma_n^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} f(x) dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{1}{2} \frac{x^2}{\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} f(x) dx = \mathbb{E}(f(X)).$$

Proposition (convergence des fonctions de répartition). Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a. réelles. Alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ si et seulement si $\mathbb{P}(X_n \leq x) = F_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ en tout point x de continuité de F .

Exemple (Un premier exemple du théorème de la limite centrale, établi par A. de Moivre (1667-1754)).

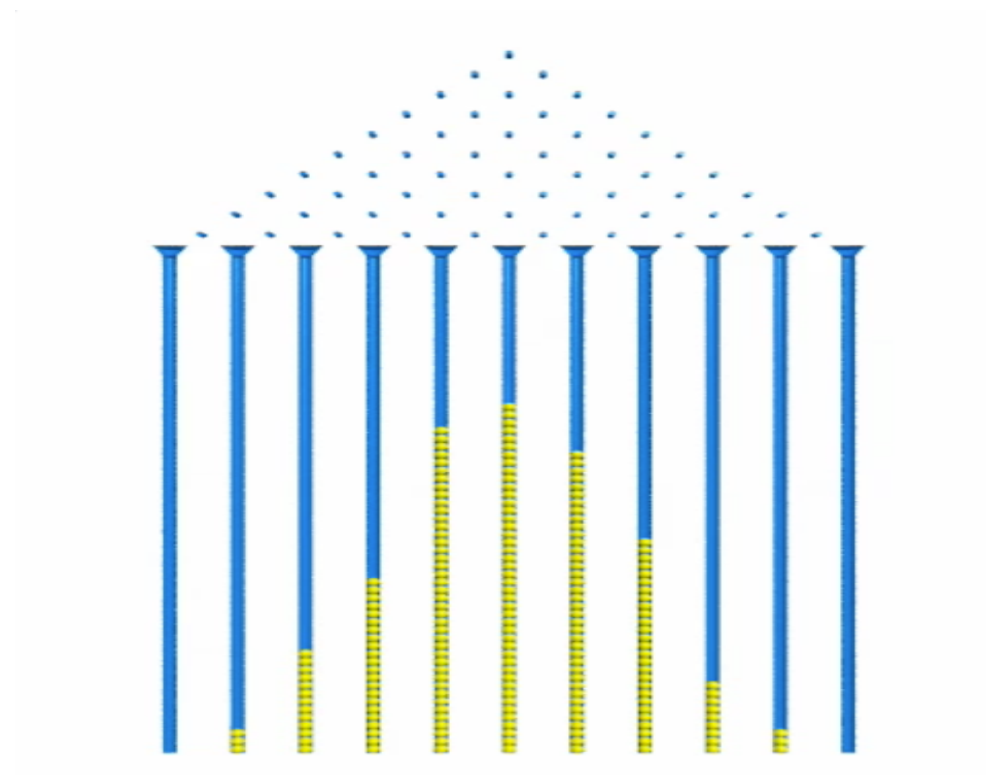
Modèle binomial : $X_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$ avec $\mathbb{P}(Y_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$ (avec $\mathbb{E}(Y_1) = 0$, $\text{Var}(Y_1) = 1$).

Planche de Galton (1889)

Source : <http://images.math.cnrs.fr/La-courbe-en-cloche.html>

PREUVE (AVEC FORMULE DE STIRLING) :

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{P}(a < \sqrt{n}X_n \leq b) \\
 &= \sum_{a < \frac{(2k-n)}{\sqrt{n}} \leq b} \underbrace{\frac{n!}{k!(n-k)!} 2^{-n}}_{\approx \frac{\sqrt{2\pi n}^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} 2^{-n}}{\sqrt{2\pi k}^{k+\frac{1}{2}} e^{-k} \sqrt{2\pi(n-k)}^{n-k+\frac{1}{2}} e^{-(n-k)}}} \\
 &\approx \sum_{a < \frac{j}{\sqrt{n}} \leq b} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{j^2}{2n}\right) \\
 &\approx \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx.
 \end{aligned}$$



Théorème (de la limite centrale). Soit $(Y_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi, de carré intégrable ($\mathbb{E}(Y^2) < +\infty$) avec $\text{Var}(Y) > 0$. Alors $X_n = \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n}$ est telle que

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\text{Var}(Y)}} \left(X_n - \mathbb{E}(Y) \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

 Limite universelle : la moyenne de n variables aléatoires i.i.d. ressemble à la loi normale (lorsque $n \rightarrow \infty$).

Historique : résultat énoncé par Laplace (1749-1827), démontré par Lyapunov (1901).

3.4 Application à la convergence des prix à temps discret

Rappel : $V_0^{\text{put}} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\frac{(K - S_{t_n})_+}{(1+r)^n} \right)$ avec $S_n = S_0 \prod_{i=1}^n u^{\varepsilon_i} d^{1-\varepsilon_i}$ avec $\mathbb{P}(\varepsilon_i = 1) = \frac{(1+r)-d}{u-d} = 1 - \mathbb{P}(\varepsilon_i = 0)$ et ε_i i.i.d.

Passage à la limite : $(1+r, u, d)$ remplacé par $(e^{\frac{rT}{n}}, e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}, e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}})$

- $(e^{\frac{rT}{n}})^n = \exp(rT)$
- $S_n = S_0 e^{X_n}$ avec $X_n := \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \ln(u) + (1 - \varepsilon_i) \ln(d)$.

Lemme. $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}((r - \frac{1}{2}\sigma^2)T, \sigma^2 T)$

PREUVE. Variante du TCL où les Y_i dépendent de n :

$$\mathbb{E}(\varepsilon_i) = \frac{e^{\frac{rT}{n}} - e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}}{e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} - e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}} \approx \frac{1}{2} + \frac{r - \frac{1}{2}\sigma^2}{2\sigma} \sqrt{\frac{T}{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

$$\mathbb{E}(X_n) = n \left[\mathbb{E}(\varepsilon) \sigma \sqrt{\frac{T}{n}} - (1 - \mathbb{E}(\varepsilon)) \sigma \sqrt{\frac{T}{n}} \right] = (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + o(1),$$

$$\text{Var}(\varepsilon_i) = \mathbb{E}(\varepsilon_i)(1 - \mathbb{E}(\varepsilon_i)) \approx \frac{1}{4} + o(1),$$

$$\text{Var}(X_n) = n \text{Var}(\varepsilon) (2\sigma \sqrt{\frac{T}{n}})^2 = \sigma^2 T + o(1),$$

...

□

Comme le payoff put est une fonction continue bornée,

$$V_0^{\text{put}} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\frac{(K - S_{t_n})_+}{(1 + r)^n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(e^{-rT} (K - S_0 e^{\mathcal{N}((r - \frac{1}{2}\sigma^2)T, \sigma^2 T)})_+)$$

(prix Black-Scholes, cf suite du cours).

Pour le call, on utilise la relation de parité call/put :

$$V_0^{\text{call}} - V_0^{\text{put}} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\frac{S_{t_n} - K}{(1 + r)^n} \right) = S_0 - \frac{K}{(1 + r)^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S_0 - Ke^{-rT} \dots$$